数理解析研究所講究録
994巻 1997年 54-64

The Eigenvalue Splitting of the Kac Operator

金沢大学自然科学研究科 百目鬼 敦 (Atsushi Doumeki)

1. 目標

次の $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の作用素

$$K(\hbar)=\exp(-V(x)/2)\exp(\hbar^2\Delta)\exp(-V(x)/2), \tag{1.1}$$

を考えます. この作用素は Kac 作用素と呼ばれ, 統計力学においてよく知られた伝送行列を, イジング模型の一般化 (スピンの値を±1から連続ベクトルに, 即ち $\mathbf{R}^d$ にした) であるKac 模型 [5] に対して考える時に現れる. 我々は, この作用素の固有値の分離に対して, 興味がある. この問題は Helffer [1][2]により, 最近考え直されているものである. $V(x)$が一様強凸, 即ち, $V(x)$ は C^∞ 関数 であって,

$$\sigma\equiv\inf_{x\in\mathbb{R}^d}(\mathrm{Hess}V)(x)>\ 0,$$

を満たすものとする. そしてさらに次の条件を満たすとする.

$$|\,\partial^\alpha V(x)\,|\le C_\alpha\langle x\rangle^{(2-|\alpha|)_+},\ 0\le|\alpha|\ <\ \infty,\ \ V(x)\ge C|x|^2-1/C,\ C\ >\ 0, \tag{1.2}$$

但し $(s)_+=\max(s,0)$ かつ $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$. この時彼は固有値の分離に関して次の結果を得た. [1]

$$\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)}\le\exp\left(-\cosh^{-1}(\hbar^2\sigma+1)\right),$$

但し $\mu_1(\hbar)$と$\mu_2(\hbar)$ は $K(\hbar)$ の最大固有値とその次の固有値である. この結果は任意の定数 $\hbar>0$ に対して 成立する. しかし この一様強凸なポテンシャルは他の重要なポテンシャル, 例えば $|x|^4$, などを含んでいない.

これ以外にも Helffer は $\hbar\to0$ の時, 次の結果を得た. [2, Remark 3.2]

$$\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)}=\exp(-(E_2(\hbar)-E_1(\hbar))+O(\hbar^2), \tag{1.3}$$

但し $E_1(\hbar),E_2(\hbar)$ は条件 (1.2) を満たすポテンシャルを持つ, Schrödinger 作用素

$$H(\hbar)=H_0(\hbar)+V=-\hbar^2\Delta+V(x) \tag{1.4}$$

の最小固有値とその次の固有値である. この準古典評価 (1.3) は,

$$\|\exp(-H(\hbar))-K(\hbar)\|=O(\hbar^2) \tag{1.5}$$

なる準古典評価と最大最小原理とから従う. 我々は評価 (1.3) と (1.5) をより広いクラスのポテンシャルに対して拡張すると同時に, $E_j(\hbar)$, $j=1,2$ を漸近展開して, $\hbar\to0$ における Kac 作用素の固有値の分離の評価を得ることを目的とする.

2. 結果

まず評価 (1.5) を拡張するために，ポテンシャルのクラスとして次のものを考える．各定数 $c>0, \rho>0, 0\leq m<\infty$ そして $0<\kappa\leq 1$, に対して

$$
\begin{aligned}
&(1)\ V(x)=V_0(x)+V_1(x),\ V_j(x)\geq 0,\ j=0,1,\\
&(2)\ V_0(x)\in C_0^{m,\,\kappa}(\mathbf{R}^d),\\
&(3)\ V_1(x)\in C^2(\mathbf{R}^d), V_1(x)\geq c\langle x\rangle^{\rho} \text{ on } |x|>R\ (R>>1),\\
&\quad |\partial_j^{\alpha}V_1(x)|\leq C_{\alpha}\langle x\rangle^{(\rho-|\alpha|)_+},\ 0\leq|\alpha|\leq 2,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

但し $C_0^{m,\,\kappa}(\mathbf{R}^d)$ はm回連続的に微分可能な，コンパクトサポートを持つ関数 $f(x)$ の族であって，その m 回微分 $\partial^{\alpha}f, |\alpha|=m$, が κ 次ヘルダー連続性を持つものであるとする．この条件の下で，評価 (1.5) を一般化できる．さらに，この条件を満たすポテンシャルを持った Schrödinger 作用素の固有値を漸近展開して (1.3) を精密化するため，次の条件をポテンシャルにかす．

$$
\begin{aligned}
&(1)\ V(x)=0 \text{ if and only if } x=0,\\
&(2)\ V_1(x)\equiv 0\ \text{ on }\ |x|\leq 1/2,\\
&(3)\ V_0(x)\in C^{\infty}(\mathbf{R}^d\setminus 0),\ \operatorname{supp}V_0\subseteq\{x\in\mathbf{R}^d\,|\,|x|\leq 1\},\\
&\quad V_0(x)\sim w(x)\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_{\alpha}x^{\alpha},\ a_0\neq 0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

但し $w(x)$ は $C^{\infty}(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ に属す正の等質関数であって $w(\lambda x)=\lambda^{\kappa+m}w(x)$ for $\lambda>0$ を満たす．(2.2) の条件 (1) は $V(x)$ が one well ポテンシャルであることを保証する．これらの条件を満たすポテンシャル用いて $K(\hbar)$ を (1.1) で，$H(\hbar)$を (1.4) で定義する．さらに (2.2) に現れた $w(x)$ を用いて，

$$
H_{\kappa}=-\Delta+a_0\,w(x)
$$

と言う Schrödinger 作用素を新たに用意しておく．以上の条件(2.1)と(2.2)のもとで，我々は評価 (1.3) の一般化かつ精密化である，$\hbar\to 0$ における，Kac 作用素の固有値の分離に関する次の主定理を得た．

定理2.1. $V(x)$ は (2.1)と(2.2)を満たすと仮定する．$\mu_1(\hbar)$ と $\mu_2(\hbar)$ はSection 1と同様とし，e_1 とe_2 は H_{κ} の最小固有値とその次の固有値とする．$\hbar\to 0$ の時，

$$
\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)}=\begin{cases}1-(e_2-\ e_1)\hbar^{\alpha}+O(\hbar^{\kappa+m}), & \kappa+m<\sqrt{2},\\ 1-(e_2-\ e_1)\hbar^{\alpha}-\Xi\hbar^{\alpha+\beta}+O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}), & \kappa+m\geq\sqrt{2},\end{cases}
\tag{2.3}
$$

但し

$$
\alpha=\frac{2(\kappa+m)}{\kappa+m+2},\qquad \beta=\frac{2}{\kappa+m}
$$

である．また $\Xi\geq 0$ は $(a_{\alpha})_{|\alpha|=1}^{\infty}$ に依存した定数で，もし $V(x)=a_0\,w(x)$ ならば $\Xi=0$ である．

この主定理の証明は(1.5)を一般化する事と, $H(\hbar)$の固有値を漸近展開する事, によって成される. よってまずこの2点を Section 3 と Section 4 とで, それぞれ定理として述べ, その後 Section 5 において証明を行う.

3. Helffer の Remark の一般化

この様な型の評価は最近 Helffer[2] によってはじめられ, Trotter–Kato 積公式の作用素ノルムに関する評価に用いられた. これを [3] と [4] はそれぞれ一般化した. 我々の考えている誤差評価は, 準古典的と言う点でこれらの結果と一致はしないが, 用いられている手法は交換子法と言う点で, [4]のそれを真似たものである.

定理3.1. $V(x)$ は条件(2.1)を満たすと仮定する. $\hbar \to 0$ の時次の評価が成立する.

$$\|\exp(-H(\hbar)) - K(\hbar)\| = O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}).$$

証明は次の主張から直ちに従う.

主張3.1. $V(x)$ は 定理 3.1.と同様とする. その時任意の$a>0$と十分小さい $t>0$ に対して, $\hbar \in (0,1]$ に関して一様に, 次の評価が成立する.

$$\begin{aligned}
&\|\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H(\hbar)) - K(t;\hbar)\| = \hbar^{-1}O(t^{1+a((\kappa+m)\wedge 2)})\\
&+ O(t^{2-a(2-\kappa-m)_+}) + \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-a(1-\kappa-m)_+-(\rho-1)_+/\rho})\\
&+ \hbar^{-1}O(t^3) + \hbar^{(\rho-2)_+/\rho}O(t^{-2a(1-\kappa-m)_+ +2-(\rho-2)_+/\rho})\\
&+ \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-(\rho-1)_+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho})\\
&+ \hbar^{2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho}),
\end{aligned}$$

但し

$$K(t;\hbar) = \exp(-\tfrac{t}{\hbar}V/2)\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H_0(\hbar))\exp(-\tfrac{t}{\hbar}V/2)$$

まず 主張 3.1 を認めた上で 定理 3.1を証明する.

定理 *3.1* の証明.

主張 3.1から 我々は $\hbar$ に関する評価を $t=\hbar$ と置いて得ることが出来る. この時未定定数 a に関する束縛条件がつぎのようにさだまる.

$$\begin{aligned}
&a\big((\kappa+m)\wedge 2)\big) > 0, \ \ -a(2-\kappa-m)_+ \ +2>0,\\
&-2a(1-\kappa-m)_+ \ +2 > 0, \ \ -a(1-\kappa-m)_+ \ +2>0.
\end{aligned}$$

我々は出来るだけ大きく$\hbar$ のオーダーを定めるべき であるから$a=1$ と取れば良い. □

注意3.1. 主張 3.1 より我々は Trotter–Kato 積公式の作用素ノルムによる誤差評価も得ることができる. [2], [3] or [4].

$N \to \infty$ の時,

$$\left\|\exp(-tH(1)) - \left(K(t/N;1)\right)^N\right\| = \begin{cases} O(N^{-(\kappa+m)/2}), & m = 0,\, 1, \\ O(N^{-(2/\rho \wedge 1)}), & m \geq 2, \end{cases}$$

が成立する. この結果は論文[3]に対応するものであり, 論文[4]では, $m = 0,\, 1$ の場合は述べられていない.

以下この節においては, 主張 3.1の証明の概略を述べる. 証明はいくつかの補題を示すことによって成される.

まずヘルダー連続性を持つ関数である$V_0(x)$を, 軟化子で近似する. $\phi(x)$を規格化された滑らかな非負の偶関数で, 単位球上にサポートを持つものとする. $0 < \epsilon << 1$ なる任意の定数に対して

$$V_{0,\epsilon}(x) = \epsilon^{-d} \int \phi(\frac{x-y}{\epsilon}) V_0(y) dy,$$

と定義して, $V_\epsilon(x) = V_{0,\epsilon}(x) + V_1(x)$ と置く. 次の恒等式に着目する.

$$\begin{aligned} \exp(-\tfrac{t}{\hbar}H(\hbar)) - K(t;\hbar) =& \left(\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H(\hbar)) - \exp(-\tfrac{t}{\hbar}H_\epsilon(\hbar))\right) \\ &+ \left(\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)) - K_\epsilon(t;\hbar)\right) \\ &+ \left(K_\epsilon(t;\hbar) - K(t;\hbar)\right) \\ \equiv&\ D_1(t;\hbar) + D_2(t;\hbar) + D_3(t;\hbar), \end{aligned} \tag{3.1}$$

但し

$$\begin{aligned} H_\epsilon(\hbar) &= H_0(\hbar) + V_\epsilon = -h^2\Delta + V_\epsilon(x), \\ K_\epsilon(\hbar) &= \exp(-V_\epsilon/2)\exp(-H_0(\hbar))\exp(-V_\epsilon/2). \end{aligned}$$

主張 3.1 を証明するためには, $D_1(t;\hbar)$, $D_2(t;\hbar)$ そして $D_3(t;\hbar)$, それぞれのノルムを評価すればよい. その際には, $V_{0,\epsilon}$の性質を知っておく必要がある.

補題3.1. $V_{0,\epsilon}$ は次の諸性質を持つ.

(1) $|V_{0,\epsilon}(x) - V_0(x)| \leq C\epsilon^{(\kappa+m)\wedge 2}$,

(2) $|\partial_j^\alpha V_{0,\epsilon}(x)| \leq C\epsilon^{-(|\alpha|-\kappa-m)_+}$, $1 \leq |\alpha| \leq 2$,

但しC は ϵ に無関係な定数である.

$D_1(t;\hbar)$と$D_3(t;\hbar)$のノルムの評価は 補題 3.1 を使うと以下のように 得られる.

補題3.2. $t \to 0$ の時, $\hbar \in (0,1]$ に関して一様に, 次の評価が成立する.

$$\|D_1(t;\hbar)\| = \|D_3(t;\hbar)\| = \epsilon^{(\kappa+m)\wedge 2}\hbar^{-1}O(t).$$

証明には次の等式に注意すれば良い.

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\tfrac{t}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)\right) - \exp\left(-\tfrac{t}{\hbar}H(\hbar)\right) \\ &\quad = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \exp\left(-\tfrac{s}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)\right)(V_0(x) - V_{0,\epsilon}(x))\exp\left(-\tfrac{(t-s)}{\hbar}H_\epsilon\right)ds, \\ &\exp\left(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon/2\right) - \exp\left(-\tfrac{t}{\hbar}V/2\right) \\ &\quad = \frac{1}{2\hbar}\int_0^t \exp\left(-\tfrac{s}{\hbar}V_{0,\epsilon}/2\right)\left(V_0(x) - V_{0,\epsilon}(x)\right)\exp\left(-\tfrac{(t-s)}{\hbar}V_0/2\right)ds. \quad \square \end{aligned}$$

次に $D_2(t;\hbar)$ を評価しよう．

補題3.3. $t \to 0$ の時，$\hbar \in (0,1]$ に関して一様に，次の評価が成立する．

$$\begin{aligned}\|D_2(t;\hbar)\| =& \epsilon^{-(2-\kappa-m)_+}O(t^2) + \epsilon^{-(1-\kappa-m)_+}\hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-(\rho-1)_+/\rho}) \\ &+ \epsilon^{-2(1-\kappa-m)_+}\hbar^{-1}O(t^3) + \hbar^{(\rho-2)_+/\rho}O(t^{2-(\rho-2)_+/\rho}) \\ &+ \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-(\rho-1)_+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho}) \\ &+ \hbar^{2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho}).\end{aligned}$$

証明の概略．微分と交換子の計算により，

$$\frac{d}{dt}K_\epsilon(t;\hbar) = -\frac{1}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)K_\epsilon(t;\hbar) - R_\epsilon(t;\hbar).$$

なる関係式が得られる．この微分方程式を解くことによって，

$$D_2(t;\hbar) = \exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)\bigr) - K_\epsilon(t;\hbar) = \int_0^t \exp\bigl(-\tfrac{(t-s)}{\hbar}H_\epsilon(\hbar)\bigr)\,R_\epsilon(s;\hbar)\,ds, \tag{3.2}$$

が得られる．但し

$$\begin{aligned}R_\epsilon(t;\hbar) &= R_{1,\epsilon}(t;\hbar) + R_{2,\epsilon}(t;\hbar), \\ R_{1,\epsilon}(t;\hbar) &= \Bigl[\exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon/2\bigr), H_0(\hbar)/\hbar\Bigr]\exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}H_0(\hbar)\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon/2\bigr), \\ R_{2,\epsilon}(t;\hbar) &= \exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon/2\bigr)\Bigl[\exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}H_0(\hbar)\bigr), V_\epsilon/(2\hbar)\Bigr]\exp\bigl(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon/2\bigr),\end{aligned}$$

である．一方，任意の定数 $0 < a < \rho$ に対して

$$\exp(-\tfrac{t}{\hbar}V_\epsilon)\langle x\rangle^a \le C\Bigl(\frac{\hbar}{t}\Bigr)^{a/\rho},\ t \to 0, \tag{3.3}$$

が成立する．また Schrödinger 作用素の一般的性質として次の補題が成り立つ．

補題3.4. $l \ge 0$ とする．$t \to 0$ の時，

(1) $\|\langle x\rangle^{-l}\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H_0(\hbar))\langle x\rangle^l\| = O(1)$.

(2) $\|\langle x\rangle^{-l}\exp(-\tfrac{t}{\hbar}H_0(\hbar))D_j\langle x\rangle^l\| = \hbar^{-1/2}O(t^{-1/2})$.

(3.3) と 補題 3.4 を使うことにより $R_\epsilon(t;\hbar)$ に対して次の評価を得る．

$$\begin{aligned}&\|R_\epsilon(t;\hbar)\| \\ &= \epsilon^{-(2-\kappa-m)_+}O(t) + \epsilon^{-(1-\kappa-m)_+}\hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{2-(\rho-1)_+/\rho}) \\ &\quad + \epsilon^{-2(1-\kappa-m)_+}\hbar^{-1}O(t^2) + \hbar^{(\rho-2)_+/\rho}O(t^{1-(\rho-2)_+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho}O(t^{2-(\rho-1)_+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{2-2(\rho-1)_+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{2(\rho-1)_+/\rho}O(t^{2-2(\rho-1)_+/\rho}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.4) と (3.2) とから, 我々は 補題 3.3 を得る. □

補題 3.2 と 補題 3.3 において, $\epsilon = t^a$ とおいて良いから, これで 主張 3.1 が得られた. □

4. Schrödinger 作用素の固有値の漸近展開

この節において $H(\hbar)$ の固有値を漸近展開する. $H(\hbar)$ の固有値を重複度をこめて数えたものを $(E_k(\hbar))_{k=1}^{\infty}$ とする. 同様に H_κ の固有値を重複度をこめて数えたものを $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ とする. 一方重複度をこめないで数えたものを $(\widetilde{e_j})_{k=1}^{\infty}$ として, それぞれの重複度を m_j とする. この時次の定理が成立する.

定理4.1. $V(x)$ は (2.1) and (2.2)を満たすとする. この時m_j 個の固有値 $E_{k(j)}(\hbar)$ が存在して, $\hbar \to 0$ の時, 次を満たす.

$$E_{k(j)}(\hbar) \sim \hbar^{\alpha}\Big(\widetilde{e}_j + \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{k(j)} \hbar^{\beta l}\Big),$$

但し

$$\alpha = \frac{\kappa + m}{\kappa + m + 2}, \qquad \beta = \frac{2}{\kappa + m + 2},$$

であって, $c_l^{k(j)}$ は (2.2) の (3) に現れる $(a_\alpha)_{|\alpha|=0}^{\infty}$ に依存したある定数である.

この様な定理は既に [6] などによって, 様々なポテンシャルのクラスに対して証明されている. しかしここでは彼らの結果を, 特異点付近でのポテンシャルの正則性に関して, 拡張することが必要である. 但し証明方法は, Simon [6] のそれを少し変更したにすぎない. 以下 定理 4.1 の証明の概略を述べる.

まず漸近展開の最初の項を求めよう.

主張4.1. 任意の $\widetilde{e_j}$に対して, 次を満たす $H(\hbar)$ の固有値が m_j 個存在する.

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{E_{k(j)}}{\hbar^{\alpha}} = \widetilde{e_j},$$

但し α は 定理 4.1 で定義した定数である.

証明は Simon の証明方法と同様に出来る. あとは固有値が $\hbar^{\beta}$ のオーダーで漸近展開出来ることを示せば良い. それには次の補題が重要である.

補題4.1.

$$P_j(\hbar) = \frac{i}{2\pi} \oint_{|\hbar^{\alpha} e_j - z| = \hbar^{\alpha}\epsilon} (H(\hbar) - z)^{-1} dz,$$

と置く. 但し $\epsilon > 0$ は, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \hbar^{\alpha}\ \widetilde{e_j}\,| < \hbar^{\alpha}\ \epsilon\}$, なるディスク内に $(E_{k(j)}(\hbar))$ 以外の固有値が入らない様に, 十分小さく取る. $\hbar \to 0$ の時, $\|(1 - P_j(\hbar))\psi_k\| \to 0$, が任意の j と $k \in (k_1(j), k_2(j), \cdots, k_{m_j}(j))$ に対して成り立つ.

この補題を使って, $\tilde{e_j}$ が 重複度 1 の場合を証明する. 重複している場合も, ほぼ同様に証明できるので省略する. $U(\hbar)f(x)=\hbar^{d\beta}f(\hbar^\beta x), f\in L^2$ と定義して,

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(\hbar) &= \hbar^{-\alpha}U(\hbar)H(\hbar)U(\hbar)^{-1},\\ \widetilde{P}_j(\hbar) &= \frac{i}{2\pi}\oint_{|e_j-z|=\epsilon}(\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}dz,\end{aligned}$$

と置く. 補題 4.1 より, $\langle\phi_k,\widetilde{P}_j(\hbar)\phi_k\rangle$ は $\hbar\to0$ の時 1 に収束する. 但し ϕ_k は, 固有値 $e_k=\tilde{e_j}$ を持つ H_κ の固有関数である. よって次の自明な関係式が成立する.

$$\hbar^{-\alpha}E_{k(j)}(\hbar)=\frac{\left\langle\widetilde{H}(\hbar)\phi_k,\widetilde{P}_j(\hbar)\phi_k\right\rangle}{\left\langle\phi_k,\widetilde{P}_j(\hbar)\phi_k\right\rangle}.$$

それ故固有値の漸近展開を得るには, レゾルベントを展開すれば良い.

$$\hbar^{-\alpha}U(\hbar)H_\kappa(\hbar)U(\hbar)^{-1}=H_\kappa$$

に注意すれば, 次の様に展開できるのが分かる.

$$(\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}\phi_k \;=\; \sum_{n=0}^{l-1}t_n(\hbar)+r_l(\hbar),$$

但し

$$\begin{aligned}t_n(\hbar)&=(-1)^n(H_\kappa-z)^{-1}[\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}]^n\phi_k,\\ r_l(\hbar)&=(\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}[\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}]^l\phi_k,\\ \widetilde{V}(\hbar^\beta x)&=\hbar^{-\alpha}\big(V(\hbar^\beta x)-a_0w(\hbar^\beta x)\big).\end{aligned}$$

$t_n(\hbar)$ と $r_l(\hbar)$ を, それぞれ評価する. $l=2$ の場合を考えれば, 一般の場合の証明もほとんど同じ様にできる. 次の様な, 滑らかなカットオフ関数 $\chi(x)$, を用意する.

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1/2,\\ 0, & |x|\ge 1,\end{cases}$$

そして $\chi_\hbar=\chi(\hbar^\beta x)$ と置く. $V_0(x)$ に対して原点付近で漸近展開を仮定したから $\hbar\to0$ で

$$\chi_\hbar\widetilde{V}\sim\hbar^{-\alpha}w(\hbar^\beta x)\sum_{|\gamma|=1}^{\infty}a_\gamma\hbar^{\beta\,|\gamma|}x^\gamma$$

が成立する. ここで $\hbar\to0$ の時 $\chi_\hbar\widetilde{V}(\hbar^\beta x)\to\widetilde{V}(0)$ である ことを 使った. これより $\chi_\hbar\widetilde{V}$ は次の様に表されるとして良い.

$$\chi_\hbar\widetilde{V}=\chi_\hbar Q_2(\hbar;x)\,+\,R_2(\hbar;x),$$

但し

$$Q_2(\hbar;x) = \hbar^{-\alpha} w(\hbar^\beta x) \sum_{|\alpha|=1} \hbar^{|\alpha|\beta} x^\alpha.$$

また $R_2(\hbar, x)$ は

$$|R_2(\hbar;x)| \le C_R \hbar^{2\beta} |x|^{(\kappa+m+2)}, \tag{4.1}$$

を満たす．但し C_R はある正の定数．さらに

$$\widehat{t_1}(\hbar) = (-1)(H_\kappa - z)^{-1} \chi_\hbar \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \phi_k,$$
$$\widehat{r_2}(\hbar) = (-1)^2 (\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} [\chi_\hbar \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1}]^2 \phi_k,$$

と置く．ここで，$\langle x\rangle^a (H_\kappa - z) \langle x\rangle^{-a}$ が，任意の $a > 0$ に対して有界作用素である事と，

$$\| \langle x\rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \widetilde{V} \| = O(\hbar^\beta),$$

である事に注意すると

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{r_l}(\hbar)\| \\
&=\|(\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \langle x\rangle^{\kappa+m+1} (\langle x\rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \widetilde{V})(H_\kappa - z)^{-1} \langle x\rangle^{-(\kappa+m+1)} \\
&\quad (\langle x\rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \widetilde{V}) \langle x\rangle^{2(\kappa+m+1)} (H_\kappa - z)^{-1} \langle x\rangle^{-2(\kappa+m+1)}\ \langle x\rangle^{2(\kappa+m+1)} \phi_k \| \\
&\quad = O(\hbar^{l\beta}).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

一方次の等式は自明である．

$$\begin{aligned}
&r_2(\hbar)\ -\ \widehat{r_2}(\hbar) \\
&=(\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \phi_k \\
&\quad + (-1)^l (\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_\hbar \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \phi_k.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ϕ_k の指数型減衰性から

$$\|(1 - \chi_\hbar)|x|^b \phi_k\| = O(\hbar^\infty), \tag{4.4}$$

が従う．(4.4) より

補題4.2. $\|r_2(\hbar)\ -\ \widehat{r_2}(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta - 2\epsilon})$,
但し

$$\epsilon = \begin{cases} (\alpha - \beta\rho)_+, & \rho < \kappa + m, \\ 0, & \rho \ge \kappa + m, \end{cases} \qquad 2(m+2)\beta - 2\epsilon > 2\beta.$$

証明．次の様に $r_2(\hbar) - \widehat{r_2}(\hbar)$ を書き直す．

$$\begin{aligned}
r_2(\hbar) - \widehat{r_2}(\hbar) &= R(\hbar)\ +\ S(\hbar), \\
R(\hbar) &= (\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_\hbar \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \phi_k, \\
S(\hbar) &= (\widetilde{H}(\hbar) - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \widetilde{V} (H_\kappa - z)^{-1} \phi_k.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

まず $R(\hbar)$ 項を評価する. $R(\hbar)$ は次の様に書き直せる.

$$\begin{aligned}
&R(\hbar) = R_1(\hbar) + R_2(\hbar),\\
&R_1(\hbar) = (\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}[-\chi_\hbar,(H_\kappa-z)^{-1}]\phi_k,\\
&R_2(\hbar) = (\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}(1-\chi_\hbar)\phi_k.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.4) より $\|R_2(\hbar)\| = O(\hbar^\infty)$. 一方

$$[-\chi_\hbar,(H_\kappa-z)^{-1}] = (H_\kappa-z)^{-1}[H_\kappa,\chi_\hbar](H_\kappa-z)^{-1}$$

を $R_1(\hbar)$に代入すると,

$$\begin{aligned}
R_1(\hbar) &= R_{11}(\hbar) + R_{12}(\hbar),\\
R_{11}(\hbar) &= (H(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\\
&\qquad\qquad \times 2D_j\hbar^\beta(D_j\chi)(\hbar^\beta x)(H_\kappa-z)^{-1}\phi_k,\\
R_{12}(\hbar) &= (\widetilde{H}(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\\
&\qquad\qquad \times \hbar^{2\beta}(D_j^2\chi)(\hbar^\beta x)D_j(H_\kappa-z)^{-1}\phi_k.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$R_{11}(\hbar)$ のみ評価する. $R_{12}(\hbar)$ の評価は $R_{11}(\hbar)$ と同様にできる. $1-\chi_\hbar$ と $(H_\kappa-z)^{-1}$ とで交換子を取る. $R_{11}(\hbar)$ は

$$\begin{aligned}
&R_{11}(\hbar)\\
&= (H(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}2D_j\hbar^\beta[(D_j^2\chi)(\hbar^\beta x),(H_\kappa-z)^{-1}]\phi_k\\
&\quad + (H(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}\widetilde{V}(H_\kappa-z)^{-1}2D_j\hbar^\beta(H_\kappa-z)^{-1}(D_j^2\chi)(\hbar^\beta x))\phi_k\\
&\equiv R_{11}^1(\hbar) + R_{11}^2(\hbar),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

と書き直せる.

$$\mathrm{supp}\ (D_j\chi)(\hbar^\beta x) \subset \{x\in\mathbb{R}^d \,|\, |x| \ge \hbar^{-\beta}/2\},$$

であるから任意の$a>0$ に対して, (4.4) と同様に

$$\||x|^a(D_j\chi)(\hbar^\beta x)\phi_k\| = O(\hbar^\infty), \tag{4.9}$$

が言える. (4.9) より

$$\|R_{11}^2(\hbar)\| = O(\hbar^\infty). \tag{4.10}$$

$R_{11}^1(\hbar)$ の評価に際しては, $\langle x\rangle^l(H_\kappa-z)^{-1}D_j\langle x\rangle^{-l}$ が任意の $l>0$ に対して有界作用素である事と,

$$|\widetilde{V}| \le C\hbar^{-\epsilon}\langle x\rangle^\gamma,$$

但し

$$\epsilon = \begin{cases} (\alpha-\beta\rho)_+, & \rho<\kappa+m,\\ 0, & \rho\ge\kappa+m,\end{cases} \qquad \gamma = \max(\kappa+m+1,\rho),$$

である事と，さらに $\chi_\hbar \widetilde{V} \leq \hbar^\beta \langle x\rangle^{\kappa+m+1}$ である事に注意する．以上の事実から

$$\begin{aligned}\|R_{11}^1(\hbar)\| =&\|(H(\hbar)-z)^{-1}\chi_\hbar \widetilde{V}(\langle x\rangle^{-\gamma}\langle x\rangle^{\gamma})(H_\kappa - z)^{-1}\\ &\times \langle x\rangle^{-\gamma}\widetilde{V}\langle x\rangle^{-\gamma}\langle x\rangle^{2\gamma}(H_\kappa - z)^{-1}\hbar^\beta 2D_j\langle x\rangle^{-2\gamma}\langle x\rangle^{2\gamma}(D_j^2\chi)(\hbar^\beta x)\\ \times(H_\kappa - z)^{-1}&\langle x\rangle^{-2\gamma}\langle x\rangle^{2\gamma}\big(\hbar^{2\beta}(D_k^2D_j\chi)(\hbar^\beta x)+\hbar^\beta D_k(D_kD_j\chi)(\hbar^\beta x)\big)\langle x\rangle^{-2\gamma}\langle x\rangle^{2\gamma}\phi_k\|\\ =&O(\hbar^{3\beta-\epsilon}),\end{aligned} \tag{4.11}$$

が従う．この評価は，$3\beta-\epsilon<2\beta$ であると言う点で，必要な条件を満足していない．しかし $1-\chi_\hbar$ と $(H_\kappa - z)^{-1}$の間で，交換子をまだ2回しか取っていないことに注意する．$1-\chi_\hbar$ と $(H_\kappa - z)^{-1}$ の間で，$(m+2)$ 回，交換子を取れば，(4.4) $\sim$ (4.11) を得たのと同様の議論を用いて，

$$\|R_{11}^1(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}), \tag{4.12}$$

なる評価を得る．$(m+3)\beta - 2\epsilon > 2\beta$ である．(4.8) と (4.10) $\sim$ (4.12) とを用いて

$$\|R_{11}(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}). \tag{4.13}$$

$$\|R_{12}(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+4)\beta-\epsilon}). \tag{4.14}$$

(4.13) と (4.14) とから $\|R_1(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon})$. よって (4.6) より

$$\|R(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}). \tag{4.15}$$

$S(\hbar)$ を評価する際には，$S(\hbar)$ が $\widetilde{V}$ を2個含んでいるので，少し注意する必要がある．$1-\chi_\hbar$ と $(H_\kappa - z)^{-1}$ の間で，$2(m+2)$ 回交換子をとれば，$R(\hbar)$ 項の評価の仕方をまねて

$$\|S(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta-2\epsilon}), \tag{4.16}$$

を得る．$2(m+2)\beta - 2\epsilon > 2\beta$ である．(4.5), (4.15) と (4.16) から $\|r_2(\hbar) - \widehat{r_2}(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta-2\epsilon})$. □

補題 4.2 より

$$\|r_2(\hbar) - \widehat{r_2}(\hbar)\| = o(\hbar^{2\beta}).$$

よって (4.2) から，$\|r_2(\hbar)\| = O(\hbar^{2\beta})$. 同様にして $\|t_1(\hbar) - \widehat{t_1}(\hbar)\| = o(\hbar^{2\beta})$, が示せる．

$$\widetilde{t_1}(\hbar) = (-1)(H_\kappa - z)^{-1}Q_2(\hbar;x)(H_\kappa - z)^{-1}\,\phi_k,$$

と置くと，(4.1) から $\|\widetilde{t_1}(\hbar) - \widehat{t_1}(\hbar)\| = O(\hbar^{2\beta})$, が示せる．$\widetilde{t_1}(\hbar)$ は，$\hbar^\beta$ に関して多項式であるから，これで固有値が，$\hbar^\beta$ に関する漸近展開を持つことが示された． □

5. 定理2.1の証明

定理 3.1 と 定理 4.1 を使って 定理 2.1 を証明する．

証明．定理 3.1 と最大最小原理とから，

$$\exp(-E_j(\hbar)) - \mu_j(\hbar) = O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}),\ \hbar\to 0,\ j=1,2,$$

が従う. この評価から

$$\mu_2(\hbar)/\mu_1(\hbar) = \exp(-(E_2(\hbar) - E_1(\hbar))) + O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2})$$
$$= 1 - (E_2(\hbar) - E_1(\hbar)) + O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}), \ \hbar \to 0,$$

を得る. これは Helffer の結果 (1.3)の一般化になっている. $H(\hbar)$, H_κ の最小固有値は重複していないという既知の事実と, 定理 4.1 とから

$$E_1(\hbar) - E_2(\hbar) \sim (e_1 - e_2)\hbar^\alpha + (c_1^1 - c_1^2)\hbar^{\alpha+\beta}$$
$$+ (c_2^1 - c_2^2)\hbar^{\alpha+2\beta} + O(\hbar^{\alpha+3\beta}),$$

を得る. 但し $\tilde{e_j} = e_j, j = 1, 2$ を使った. ここで, $\kappa + m = \alpha + \beta$ である時 $\kappa + m = \sqrt{2}$ であることに注意すれば, 定理 2.1における評価が従う. □

自明でない例 $V(x) = |x|^\sigma \sqrt{1+|x|^2}$, $0 < \sigma < \infty$, なるポテンシャルを持つ Kac 作用素を考える. カットオフ関数 $\chi(x)$ を, $0 \le \chi(x) \le 1$ かつ $\operatorname{supp}\chi(x) \in \{|x| \le 1\}$, を満たすように取って, $V_1(x) = (1 - \chi(x))V(x)$ and $V_0(x) = \chi(x)V(x)$と置く. $V(x)$ は (2.1) と (2.2) を満たす. 但しこの時 $m = [\sigma]$, $\kappa = \sigma - m$ and $\rho = \sigma + 1$. 定理 2.1 より $\hbar \to 0$ の時,

$$\mu_2(\hbar)/\mu_1(\hbar) = \begin{cases} 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha + O(\hbar^\rho), & \sigma < \sqrt{2}, \\ 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha - \Xi\hbar^{\alpha+\beta} + O(\hbar^{\rho\wedge 2}), & \sigma \ge \sqrt{2}, \end{cases}$$

が成立する. 但し e_1 と e_2 は $-\Delta + |x|^\sigma$ の 最小固有値とその次の固有値で, $\alpha = 2\sigma/(\sigma+2)$, $\beta = 2/(\sigma + 2)$.

参考文献

[1] Helffer, B., Universal estimate of the gap for the Kac operator in the convex case, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 631–642.

[2] Helffer, B., Around the transfer operator and the Trotter-Kato formula, Operator theory: Advances and Applications, Vol 78, Basel: Birkhäuser Verlarg, 161 – 174, 1995.

[3] Ichinose, T., Takanobu, S., Estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup, Commun. Math. Phys. (to appear)

[4] Doumeki, A., Ichinose, T., Tamura, H., Error bounds on exponential product formulas for Schrödinger operators, J. Math. Soc. Japan (to appear)

[5] Kac, M., Mathematical Mechanics of Phase Transitions, 1966 Brandeis Lectures, Gordon and Breach, 1968.

[6] Simon, B., Semiclassical analysis of low lying eigenvalues I. Non degenerate minima: Asymptotic expansion, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **38** (1983), 295 – 307.